

EL MODELO SLX: AMPLIACIÓN DE LA FORMA GENERAL, Y SENSIBILIDAD DE LOS DESBORDAMIENTOS ESPACIALES A LA ESPECIFICACIÓN DE LA W

J. Paul ELHORST (*)

Universidad de Groningen

Solmaría HALLECK VEGA (**)

Universidad de Groningen

Universidad de París

Resumen

El modelo con retardo espacial de X , abreviadamente SLX, es un modelo de regresión lineal cuya especificación se ha ampliado para incluir variables explicativas observadas en las unidades vecinas de un corte transversal, y constituye el modelo econométrico espacial más sencillo que genera efectos de desbordamiento espacial (*spillovers*) flexibles; permite parametrizar de forma simple la matriz de ponderaciones espaciales –denominada W –, que indica cómo se ordenan espacialmente las unidades de la muestra. Sin embargo, este tipo de modelo ha recibido relativamente poca atención tanto en la literatura teórica como en los estudios aplicados. El presente trabajo viene a cubrir ese hueco mediante la consideración de varias ampliaciones a partir de la forma general o estándar. Se constata que, en contra de lo que se indica en muchos estudios empíricos, la afirmación de que los resultados son robustos para cualquier especificación de W no está suficientemente fundamentada. En particular, se demuestra que los *spillovers*, uno de los principales objetivos en los estudios de economía y econometría espacial, son sensibles a la especificación de W . Además, concluimos que la práctica habitual de utilizar la misma configuración de W para cada retardo espacial debe ser cuestionada. Estos resultados se ilustran con un modelo de demanda de cigarrillos utilizando datos de panel correspondientes a 46 estados de EE.UU. durante el período entre 1963 y 1992.

Palabras clave: modelos econométricos espaciales, parametrización de la matriz W , efectos de desbordamientos, contrastes.

Abstract

The spatial lag of X model, a linear regression model extended to include explanatory variables observed on neighboring cross-sectional units, is the simplest spatial econometric model producing flexible spatial spillover effects and the easiest model to parameterize the spatial weights matrix, denoted by W , describing the spatial arrangement of the units in the sample. Nevertheless, it has received relatively little attention in the theoretical and applied spatial econometrics literature. This study fills this gap by considering several extensions of its basic form. It is found that the claim made in many empirical studies that their results are robust to the specification of W is not sufficiently substantiated. Especially the spatial spillover effects, often the main interest of spatial economic and econometric studies, turn out to be sensitive to the specification of W . In addition, it is found that the common practice to adopt the same W for every spatial lag should be rejected. These findings are illustrated using a cigarette demand model based on panel data of 46 U.S. states over the period 1963 to 1992.

Key words: spatial econometric models, parameterizing W , spillovers, testing.

JEL classification: C01, C21, C23, R15.

I. INTRODUCCIÓN

DESDE los principales focos de atención de los estudios de economía y econometría espacial son los retardos y los desbordamientos espaciales. Un retardo espacial (*spatial lag*) mide el impacto producido por la variable dependiente (Y), las variables explicativas (X) o el término de error (u) observados en unidades j distintas de la unidad i sobre la variable dependiente de la unidad i . Un efecto de desbordamiento espacial (*spatial spillover*) se define como el impacto marginal producido por una variación en una variable explicativa de una unidad del corte transversal sobre los valores de la variable dependiente en otra unidad, y su

cálculo proviene de la forma reducida de un modelo econométrico espacial. El efecto indirecto procedente de las unidades vecinas añade información útil al efecto directo, el cual mide el impacto marginal de una variación registrada en una variable explicativa de una unidad del corte transversal sobre la variable dependiente en esa misma unidad.

La literatura distingue siete tipos de modelos econométricos espaciales estacionarios, que difieren entre sí en el tipo y el número de retardos espaciales incluidos en cada uno de ellos. El cuadro n.º 1 presenta una taxonomía general de los siete modelos, incluyendo su notación y abreviaturas. La matriz de ponderaciones espaciales W simboliza la ordenación

espacial de las unidades del corte transversal que componen la muestra. Dado un corte transversal formado por N unidades, W es una matriz de orden $N \times N$ que describe qué pares de esas unidades están relacionadas entre sí y cuáles no. En caso de estar relacionadas, el elemento correspondiente toma valor positivo; de lo contrario, es cero. Recientemente, Halleck Vega y Elhorst (2015) señalaron que los modelos SAR, SEM y SAC tienen una utilidad limitada en el análisis empírico, debido a las restricciones que generan sobre los efectos de desbordamiento específicos de cada uno de ellos. En los modelos SAR y SAC, la ratio entre el efecto de desbordamiento y el efecto directo es idéntica para todas las variables explicativas, mientras que en el modelo SEM se asume que, por diseño, los efectos de desbordamiento son nulos. Solo en los modelos SLX, SDEM, SDM y GNS los efectos de desbordamiento espacial pueden tomar valores distintos de cero. Dado que el modelo SLX es el más simple de esta familia de modelos econométricos espaciales, recomendamos utilizarlo como punto de partida especialmente cuando un estudio se oriente a estimar los efectos de desbordamiento espacial y no se cuente con una teoría subyacente que justifique el uso de un modelo alternativo.

Una ventaja añadida del modelo SLX, respecto a otros modelos econométricos espaciales, es que la W puede ser parametrizada. En la tercera sección del presente artículo se ofrece una explicación detallada. Supongamos que un investigador, en lugar de imponer de antemano una determinada especificación de W , desea utilizar un enfoque paramétrico simple mediante una matriz construida con las inversas de las distancias $w_{ij} = 1/d^{\gamma}$, donde γ es un parámetro a estimar que informará sobre la intensidad de las

conexiones entre las observaciones del corte transversal. Pueden utilizarse métodos simples de estimación no lineal para evaluar los parámetros del modelo SLX, como estimar alternativamente los parámetros de respuesta, dado γ , para después estimar γ dados los parámetros de respuesta, hasta lograr la convergencia. Valores reducidos de γ implican que cuanto más distantes están las observaciones, el impacto es comparativamente mayor, lo contrario en el caso de que este parámetro de caída con la distancia (o *distance decay*) tome valores altos.

Pese a estas dos ventajas, existen varios problemas que pueden causar que el modelo contenga errores de especificación. Por ejemplo, podría ocurrir que la verdadera matriz de ponderaciones espaciales W^* , la que generó los datos, sea diferente de la matriz de ponderaciones espaciales W utilizada para modelizar los retardos espaciales exógenos (WX). En lugar de una matriz inversa de caída con la distancia, la W también puede especificarse como una matriz exponencial de caída con la distancia. Además, en lugar de un γ común para todas las variables explicativas con retardo espacial, cabe la posibilidad de considerar un γ_k separado para cada variable WX_k ($k=1, \dots, K$), donde K representa el número de variables X . Otra opción es modelizar los elementos de W mediante una ecuación de gravedad tal que, por ejemplo, incorpore el tamaño de las unidades i y j en términos de población y/o de producto interior bruto.

Puede ocurrir, igualmente, que el modelo SLX deba ampliarse todavía más al objeto de incluir un retardo espacial en la variable dependiente o endógena (WY), dando lugar al SDM, o un retardo

CUADRO N.º 1

MODELOS ECONOMÉTRICOS ESPACIALES CON DIFERENTES COMBINACIONES DE RETARDOS ESPACIALES Y SU FLEXIBILIDAD EN CUANTO A LOS DESBORDAMIENTOS ESPACIALES (SPILLOVERS)

TIPO DE MODELO	RETARDO(S) ESPACIAL(ES)	FLEXIBILIDAD DE SPILLOVERS
SAR, <i>Spatial autoregressive model</i> *	WY	Ratios constantes
SEM, <i>Spatial error model</i>	Wu	Cero por diseño
SLX, <i>Spatial lag of X model</i>	WX	Totalmente flexibles
SAC, <i>Spatial autoregressive combined model</i> **	WY, Wu	Ratios constantes
SDM, <i>Spatial Durbin model</i>	WY, WX	Totalmente flexibles
SDEM, <i>Spatial Durbin error model</i>	WX, Wu	Totalmente flexibles
GNS, <i>General nesting spatial model</i>	WY, WX, Wu	Totalmente flexibles

Notas: * También conocido como el modelo con retardo espacial. ** También conocido como el modelo SARAR o de Cliff-Ord.

espacial en el término de error (Wu), obteniéndose el SDEM (véase el cuadro n.º 1). En tal caso, una cuestión a dilucidar es si la matriz de ponderaciones espaciales de ese retardo es la misma o debería ser diferente de la inicial, W , y si puede ser a su vez parametrizada. Por último, otros posibles errores de especificación radican en la omisión de variables explicativas, relevantes del modelo, la presencia de heteroscedasticidad, o la existencia de endogeneidad en algunos de los elementos que sí se han considerado. El objetivo de este artículo es tratar formalmente estas extensiones, discutiendo los argumentos que se encuentran detrás de cada una de ellas e ilustrarlas con una aplicación; estamos interesados, especialmente, en investigar el impacto de todas las decisiones, referentes al modelo, sobre la magnitud de los efectos de desbordamiento espacial. En atención a estos objetivos, el artículo se inscribe dentro de la literatura econométrica teórica tradicional que investiga las consecuencias en el sesgo, la consistencia y la eficiencia de las estimaciones de los parámetros de la omisión de variables explicativas relevantes, la introducción de variables explicativas irrelevantes o la adopción de una matriz W mal especificada; conectado con todo ello, también prestamos atención a los efectos directos y a los efectos de desbordamiento espacial o *spillovers*. Muchos estudios aplicados solo consideran unas pocas especificaciones de W y aseguran que los resultados son robustos a su especificación. Demostraremos que dicha afirmación no se encuentra lo suficientemente justificada ya que los *spillovers* espaciales parecen ser sensibles a la especificación de W . Además, discutimos brevemente la utilidad o no de los procedimientos de contraste propuestos en la literatura para abordar estos problemas de especificación.

Los resultados derivados de este estudio son de aplicación a modelos que utilizan tanto datos de corte transversal como paneles espaciales, siempre y cuando la especificación del modelo sea homogénea en sus parámetros. Existe una incipiente literatura de modelos econométricos espaciales basados en la heterogeneidad que implica parámetros diferentes en cada una de las unidades de la muestra (Aquaro *et al.*, 2015). De forma general, los parámetros de los modelos heterogéneos solo pueden estimarse consistentemente para paneles espaciales con series temporales largas (T). La cuestión de si los resultados derivados en el presente artículo también son aplicables a ese tipo de modelos supera nuestros objetivos, aunque cabe señalar que la mayoría de los estudios espaciales con datos de panel se caracterizan por un gran

número de observaciones en el dominio del corte transversal (N) con respecto a T . En relación con la última cuestión, existe una creciente literatura en la que estos modelos econométricos espaciales incluyen también factores comunes (Bailey *et al.*, 2016). Los resultados obtenidos en nuestro estudio son aplicables a ese tipo de modelos, ya que los factores comunes pueden ser tratados como variables de control adicionales (Halleck Vega y Elhorst, 2016).

La estructura del artículo es como sigue: la segunda sección se dedica a describir el modelo SLX y presentar las diferentes especificaciones paramétricas de W . Aun cuando el modelo SLX ya cubre K de los $K+2$ retardos espaciales potenciales, la sección tercera aborda la cuestión de si el modelo SLX debería ser ampliado con un retardo espacial adicional, ya sea en WY o en Wu . Consideramos los procedimientos de contraste habituales desarrollados en la literatura econométrica; esto es, los test del multiplicador de Lagrange, LM, (robustos), el enfoque «de lo general a lo particular», el test J y el enfoque bayesiano. Además, la sección tercera se ocupa de si la matriz W que interviene en el retardo adicional incorporado al SLX puede ser la misma o debería ser diferente. La sección cuarta utiliza el modelo de demanda de cigarrillos de Baltagi y Li (2004), para datos de 46 estados de EE.UU. a lo largo del período 1963-1992, con el objetivo de medir el impacto de usar diferentes matrices de ponderaciones, y diferentes extensiones del modelo SLX, sobre el signo, la magnitud y los niveles de significación de los efectos de desbordamiento espacial. Por último, en la quinta sección, se exponen las conclusiones y se proponen posibles líneas para futuras investigaciones.

II. EL MODELO SLX Y LA PARAMETRIZACIÓN DE W

Un aspecto a menudo criticado en la forma de hacer econometría espacial es que la matriz de contactos se especifica de antemano, en lugar de estimarse junto con los otros parámetros del modelo (Corrado y Fingleton, 2012). Numerosos estudios han intentado analizar la robustez de los resultados a distintas especificaciones de W y determinar cuál de ellas proporciona un mejor ajuste a los datos mediante diferentes criterios como los basados en la función de verosimilitud, en las probabilidades *a posteriori* bayesianas o en los test J. La parametrización de la matriz supondría ir un paso más allá. Halleck Vega y Elhorst (2015) demuestran que el

modelo SLX brinda esa posibilidad. Este modelo puede expresarse como

$$Y = \alpha \mathbf{1}_N + X\beta + WX\theta + \varepsilon, \quad [1]$$

donde Y representa un vector $N \times 1$ formado por las observaciones de la variable dependiente para cada unidad de la muestra ($i = 1, \dots, N$), $\mathbf{1}_N$ es un vector $N \times 1$ con todos sus elementos iguales a uno, asociado al término constante α , X denota una matriz $N \times K$ de variables explicativas asociada al vector $K \times 1$ de parámetros β , y $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$ es un vector de perturbaciones que se distribuyen de forma idéntica e independiente, con media cero y varianza σ^2 . Dado que W es de orden $N \times N$ y X es de orden $N \times K$, la matriz WX de retardos espaciales exógenos es de orden $N \times K$. En consecuencia, el vector de parámetros de respuesta θ es, al igual que β , de orden $K \times 1$. Los efectos de desbordamiento de este modelo combinan las estimaciones de θ con las variables de WX , mientras que los efectos directos resultan de la estimación de β y de las variables X .

Una gran parte de los estudios dedicados a la interacción espacial entre unidades geográficas adoptan una matriz de contigüidades de tipo binario, donde el elemento $w_{ij} = 1$ si la unidad i comparte una frontera común con j y cero en caso contrario (véase cuadro n.º 2). Los argumentos a favor de una matriz de contigüidades binaria se enuncian en Stakhovych y Bijmolt (2009). En concreto, este tipo de matrices se comportan mejor a la hora de detectar el verdadero modelo que otras matrices de ponderaciones espaciales. Sin embargo, debe subrayarse que en ese estudio solo se comparan las especificaciones SAR y SEM. Además, la práctica común de adoptar una determinada matriz de ponderaciones espaciales es arbitraria, y parece preferible comparar diferentes especificaciones entre sí o estimar el gradiente de caída con la distancia (*distance decay*).

Inspirado por la primera ley de Tobler que dice que la relación entre los elementos próximos será más fuerte que la existente entre las más distantes, los términos de W pueden definirse en base a la inversa de la distancia con un factor de caída con el alejamiento

$$w_{ij} = \frac{1}{d_{ij}^\gamma}, \quad [2]$$

donde d_{ij} denota la distancia existente entre las observaciones i y j , y γ es un parámetro denominado

de *distance decay*. La estimación del parámetro γ puede resolverse por técnicas no lineales simples, lo que nos aportará información útil sobre la naturaleza de las interdependencias en la muestra. Por ejemplo, si la estimación de γ es pequeña, eso sería indicativo de que la especificación binaria, basada en la contigüidad, no constituye una buena representación del caso analizado, ya que el criterio de estricta contigüidad limita la interacción solo a aquellas unidades que comparten frontera.

Una especificación alternativa para modelizar la caída con la distancia es utilizar la función exponencial negativa

$$w_{ij} = \exp(-\delta d_{ij}). \quad [3]$$

Cuanto mayor sea el valor que tome la estimación del parámetro δ , menor es la influencia entre los individuos a medida que la distancia entre ellos aumenta; en otras palabras, el umbral de interacción, o punto de corte, se reduce.

Otra opción consiste en modelizar los elementos de la matriz de ponderaciones mediante una ecuación de gravedad, que se entronca en la ley de gravitación universal de Newton, cuya popularidad se debe a los buenos resultados producidos a la hora de explicar datos de flujos. Una razón adicional es que los términos de una matriz de ponderaciones espaciales deben reflejar el grado de interacción espacial entre las unidades de la muestra, lo que es sinónimo de la intensidad de los flujos. Como ejemplos ilustrativos caben citar, entre otros, los estudios de Bavaud (1998) y Corrado y Fingleton (2012, sección tercera). Otra ventaja del modelo de gravedad estriba en que está bien integrado en la literatura sobre teoría económica (véase Behrens *et al.*, 2012, entre otros), que es, precisamente, una de las críticas habituales hacia los modelos econométricos espaciales (Corrado y Fingleton, 2012). Una ecuación de gravedad puede especificarse como

$$w_{ij} = \frac{P_i^\gamma P_j^\gamma}{d_{ij}^{\gamma^3}}, \quad [4]$$

donde P mide el tamaño de las unidades i y j en términos de población y/o de producto bruto.

Muchos estudios, tanto en experimentos de simulación como de tipo aplicado, asumen inicialmente que la matriz de ponderaciones es diferente

para retardos espaciales distintos, pero terminan por imponer la restricción de que las matrices W son iguales, lo que constituye otra debilidad de toda esta literatura (McMillen, 2012). Es decir, en lugar de [2], los elementos de la matriz de ponderaciones espaciales de cada retardo espacial $W_k X_k$ pueden modelizarse como

$$w_{ijk} = \frac{1}{d_{ij}^{\gamma_k}}, \quad [5]$$

Debe insistirse en que la teoría tiene que ser el elemento fundamental para determinar la especificación de la forma funcional de W , tal y como se discute extensamente en Corrado y Fingleton (2012). No obstante, a falta de un marco teórico sustantivo, una opción alternativa puede consistir en comparar los resultados obtenidos al utilizar distintas formas funcionales en la matriz W . Se puede alegar que existen numerosas formas funcionales utilizables; en cualquier caso, el aspecto primordial es que mediante la parametrización de W se contraste, en lugar de asumir, el mantenimiento de la hipótesis de que la interacción disminuye a medida que la distancia entre las unidades en la muestra se incrementa.

III. EXTENSIONES DEL MODELO SLX: CASOS SDM Y SDEM

1. Las especificaciones SDM y SDEM

Para contrastar si el modelo SLX describe suficientemente bien la estructura espacial de los datos, puede compararse el SDM y el SDEM. Como se muestra en el cuadro n.º 1, la primera opción extiende el modelo SLX incorporando un retardo espacial endógeno entre las variables dependientes (WY) mientras que, en el segundo caso, se plantea un retardo espacial en el término de error (Wu). Tomando la ecuación [1] como punto de partida, la primera extensión puede expresarse como

$$Y = \rho WY + \alpha_N X\beta + WX\theta + \varepsilon, \quad [6]$$

cuyos efectos de desbordamiento espacial se corresponden con los elementos de fuera de la diagonal de la siguiente matriz $N \times N$

$$(I - \rho W)^{-1}(I_N \beta + W\theta), \quad [7]$$

y los efectos directos coinciden con los elementos de la diagonal de esa matriz. La segunda extensión adopta la forma

$$Y = \alpha_N + X\beta + WX\theta + u \text{ y } u = \lambda Wu + \varepsilon, \quad [8]$$

en la que los efectos de desbordamiento espacial y los efectos directos se identifican, al igual que en el modelo SLX, con θ y β . Otra diferencia es que mientras en el SDM los desbordamientos espaciales son globales, en el SDEM son de naturaleza local (véase Halleck Vega y Elhorst, 2015). Los desbordamientos globales tienen lugar cuando un cambio en el valor de X , en una unidad espacial cualquiera, se transmite a todas las demás unidades, incluso si no guardan relación alguna entre sí de acuerdo con W . Este resultado es consecuencia de combinar el vector de parámetros de respuesta, β , con la matriz de multiplicadores espaciales $(I - \rho W)^{-1}$, siempre y cuando el coeficiente espacial autorregresivo de WY sea distinto de cero ($\rho \neq 0$). Por contraste, los desbordamientos locales son aquellos que solo afectan a otras unidades cuando, de acuerdo con W , están conectadas. Esto requiere que, en [6], el coeficiente de WY sea cero ($\rho = 0$) y que los coeficientes de WX sean distintos de cero ($\theta \neq 0$). Debe tenerse presente que la elección entre *spillovers* globales y locales está relacionada con la especificación de W . Un modelo de *spillovers* globales ofrece más verosimilitud con una matriz W dispersa que con una matriz densa, esto es, una matriz en la que solo un reducido número de sus elementos son distintos de cero, como por ejemplo una matriz de contigüidades binaria. A la inversa, un modelo de *spillovers* locales resulta más verosímil con una matriz W densa, en preferencia a una dispersa, en la que todos los elementos de fuera de la diagonal son distintos de cero, como por ejemplo una matriz construida con las inversas de las distancias o utilizando caídas exponenciales.

2. Contrastando las extensiones SDM y SDEM

No hay ninguna razón que impida utilizar los contrastes LM clásicos y robustos, propuestos por Anselin (1988) y Anselin *et al.* (1996) para comparar la extensión del modelo básico con WY o con Wu ; sin embargo, no está claro que estos contrastes sean muy potentes, pues su comportamiento solo se ha investigado sobre la base de los residuos del modelo de mínimos cuadrados ordinarios (MCO), es decir, del modelo sin ninguna variable WX , y no sobre la base de los residuos del modelo SLX. En general, los valores del logaritmo de la función de verosimilitud de los modelos SDM ($WY + WX$) y SDEM ($WX + Wu$) guardan mayor semejanza entre sí de la que mantienen los modelos SAR (WY) y SEM (Wu); el resultado es una mayor dificultad para rechazar

un modelo frente a otros. A la inversa, la estimación del modelo GNS ($WY+WX+Wu$) tampoco es de mucha ayuda debido al sobreajuste (*overfitting*). Aunque es posible estimar los parámetros del último modelo, tienden a producirse estimaciones extremas que se compensarán unas con otras, con lo cual su comportamiento no es mejor que el de los casos SDM y SDEM y no ayuda a la hora de elegir entre modelos más simples, con menos retardos espaciales, enfoque conocido como «de lo general a lo particular» (véase Burridge *et al.*, 2016, donde obtienen un resultado similar).

LeSage (2014) demuestra que un enfoque bayesiano simplifica considerablemente la tarea de seleccionar la especificación apropiada, tanto en lo que respecta al modelo como a la matriz de ponderaciones. Este enfoque determina simultáneamente las probabilidades *a posteriori* de los modelos SDM y SDEM para una W dada, y también la probabilidad *a posteriori* de diferentes matrices W para una especificación dada del modelo. Dichas probabilidades se basan en el logaritmo de la función de verosimilitud marginal asociada a las diferentes opciones consideradas, y se obtienen o bien marginando los parámetros del modelo marginalizando o bien los parámetros del modelo a la matriz W . Si el logaritmo de la verosimilitud marginal de un modelo, o de una W , es superior al de otro modelo, u otra matriz W , también lo será la probabilidad *a posteriori*. Algunos estadísticos populares como la ratio de verosimilitud o los estadísticos de Wald y/o de LM comparan un modelo con otro basándose en ciertas estimaciones de los parámetros. La fortaleza del enfoque bayesiano reside en que las probabilidades *a posteriori* se calculan para todo el espacio paramétrico, por la sencilla razón de que estos parámetros son objeto de marginalización. La inferencia obtenida del valor del logaritmo de la función de verosimilitud marginal se refuerza por el hecho de que los modelos SDM y SDEM comparten el mismo conjunto de variables explicativas (X, WX) y se basan en los mismos *a priori*, uniformes, para ρ o λ , relativos a WY o a Wu . Esta condición adopta la forma de $p(\rho) = p(\lambda) = 1/D$, donde $D = 1/\omega_{max} - 1/\omega_{min}$ donde ω_{max} y ω_{min} representan, respectivamente, el mayor y menor (negativo) valor propio de W . La condición no introduce ningún tipo de información subjetiva por parte del investigador, pues se basa en todo el espacio de parámetros ($1/\omega_{min}, 1/\omega_{max}$) sobre el que se han definido ρ y λ ($\omega_{max} = 1$ si W se ha estandarizado por filas o por su mayor valor propio). Véase LeSage (2014, 2015) para una exposición más detallada sobre la elección del modelo, y LeSage y Pace (2009, capítulos 5 y 6) sobre la elección de W .

Como alternativa al enfoque bayesiano encontramos el método basado en los contrastes J. En el editorial del primer número del volumen 11 de *Spatial Economic Analysis*, Elhorst *et al.* (2016) realizan un breve repaso de esta literatura, relativamente modesta en cuanto a tamaño pero creciente en importancia, formada por un total de diez estudios. Llegan a la conclusión de que la principal barrera para los investigadores es que hasta ahora nadie ha abierto los códigos para permitir su libre acceso. Por esta razón, hemos decidido excluir el test J de nuestro estudio.

Otro problema relativo a la especificación es que no está claro si la matriz debería ser la misma que la empleada para modelizar los retardos espaciales exógenos (WX). Si la matriz de ponderaciones espaciales para las últimas variables se especifica de tipo binario, basada en la hipótesis de contigüidad, es práctica habitual utilizar la misma matriz a la hora de extender el modelo, con un retardo espacial en la endógena (WY) o con un retardo espacial en el término de error (Wu). No obstante, si la matriz W se parametriza, por ejemplo, utilizando un parámetro de decaimiento con la distancia (*distance decay*), que luego se estima, parece más razonable considerar también otro parámetro de distancia para WY diferente del de WX , o para Wu igualmente diferente del de WX . En caso de seguirse este enfoque, los test citados resultan de escasa utilidad ya que se basan en la hipótesis de que la matriz W de WY o de Wu es exógena y no se ha parametrizado. Yu y Lee (2015) consideran un modelo espacial en el que los elementos de la matriz W son función de un conjunto de variables explicativas que podrían ser endógenas; además esta extensión no implica la estimación de parámetros desconocidos, tal como ocurre habitualmente cuando se parametriza W .

En resumen, si se determina que el modelo SLX debe ser extendido, existen dos variantes a considerar: o bien el modelo debe extenderse con un retardo espacial afectando al término de error, lo que se conoce como «autocorrelación espacial», o bien con un retardo espacial en la variable endógena. A continuación se discuten estas dos posibilidades.

3. SDEM: SLX y autocorrelación espacial en los errores

Si el modelo SLX debe ser extendido, en respuesta a la existencia de autocorrelación espacial en los errores, existen argumentos metodológicos de peso

para adoptar una configuración diferente de la matriz de ponderaciones espaciales. Por ejemplo, no se puede descartar que la matriz W utilizada para modelizar las variables WX sea diferente de la verdadera, llamémosla W^* . Si esto es cierto, el error de especificación $(W-W^*)X$ se transmite al término de error, y el resultado es que los errores pierden su propiedad de esfericidad (ya no se mantendrá que $Var(\varepsilon)=\sigma^2I$). En su lugar, la especificación del término de error seguirá un proceso espacial autorregresivo con una matriz de ponderaciones espaciales V distinta de W y $Var(u)=\sigma^2[(I-\lambda V)^T(I-\lambda V)]^{-1}$. Debe recordarse, además, que ignorar la presencia de autocorrelación espacial, cuando es relevante, tan solo afecta a la eficiencia, no a la consistencia, y que la matriz W utilizada para modelizar la autocorrelación espacial no tiene ningún efecto en los desbordamientos espaciales derivados de la forma reducida del modelo (véase ecuación [8]). Consecuentemente, la decisión sobre qué matriz de ponderaciones espaciales se debe utilizar para modelizar la autocorrelación espacial es una cuestión menos trascendente. Por esta razón, podemos seguir a Stakhovych y Bijmolt (2009) y adoptar inicialmente una matriz de contigüidad de primer orden.

El test de Hausman puede utilizarse cuando existan dos estimadores consistentes, uno de los cuales es ineficiente y el otro es eficiente. Pace y LeSage (2008) adaptan este test, al caso espacial, para las estimaciones MCO y SEM, la misma técnica puede utilizarse para comparar las estimaciones SLX y SDEM. Según LeSage y Pace (2009: 62), el rechazo de la hipótesis nula de igualdad en las estimaciones de los coeficientes bajo SLX y SDEM puede ayudar a diagnosticar la existencia de variables omitidas, correlacionadas con otras sí incluidas en el modelo. El estadístico de contraste sigue una distribución Chi-cuadrado con grados de libertad igual al número de parámetros en la regresión. Pueden darse tres resultados diferentes. Primero, las estimaciones de los coeficientes de los modelos SLX y SDEM no difieren entre sí sustancialmente, y el coeficiente de autocorrelación espacial no es significativo. Cuando esto ocurre, no es necesario plantear la hipótesis de autocorrelación espacial para mejorar la especificación del modelo SLX. Segundo, las estimaciones de los coeficientes SLX y SDEM no difieren entre sí de manera sustancial, pero el coeficiente de autocorrelación espacial es significativo. En este caso, el modelo producirá una log-verosimilitud significativamente más alta que el SLX, con lo que no cabe más que inferir que el término de error espacial está capturando el efecto de las variables omitidas. No obstante, al no ser posible rechazar la

hipótesis nula, también puede concluirse que estas variables omitidas no están correlacionadas con las variables incluidas y que, por tanto, la extensión SDEM del modelo SLX conduce, a lo sumo, a una ganancia de eficiencia. Tercero, las estimaciones de los coeficientes SLX y SDEM difieren entre sí de manera sustancial y el coeficiente de autocorrelación espacial es significativo (la probabilidad de que el coeficiente de autocorrelación espacial no sea significativo es en este caso despreciable). Este resultado apunta a serios problemas de mala especificación, debido a la omisión de variables explicativas relevantes.

La subespecificación, en el último caso, puede deberse a que W , la matriz de contigüidades binaria utilizada como candidata potencial, sea demasiado simple. Para testar este punto, pueden considerarse otras especificaciones de W . Alternativamente, también se podría parametrizar esta matriz W . Halleck Vega y Elhorst (2015) señalan que la parametrización de W , utilizando modelos distintos del SLX, se complica por el problema de *solución perfecta*. En concreto, los autores demuestran que la solución $\rho=-1$, $\gamma=0$, $\alpha=Y_1+\dots+Y_N$, y $\beta=0$ proporciona un ajuste perfecto de la variable dependiente en el modelo SAR; también en los modelos SEM y SDM si, además, se añade la condición $\theta=0$ (1). Puesto que el logaritmo de la verosimilitud de la *solución perfecta* no existe, esa solución debe excluirse del análisis. Para demostrar la consistencia del estimador máximo-verosímil (ML) del modelo SAR, Lee (2004) indica que debe cumplirse una de las siguientes dos condiciones: a) las sumas de las filas y columnas de las matrices W , $(I-\rho W)^{-1}$ y $(I-\lambda W)^{-1}$, antes de que W sea estandarizada, deben estar uniformemente acotadas, en valor absoluto, conforme N tiende a infinito; o b) las sumas de las filas y columnas de W , antes de la estandarización, no pueden tender a infinito a igual o mayor velocidad que el tamaño de la muestra N . La condición a) proviene de Kelejian y Prucha (1998, 1999).

Si los elementos de W adoptan la forma expuesta en [2], entonces $w_{ij}=1$ si $\gamma=0$. En tal caso, todos los elementos de fuera de la diagonal de W valen uno, como resultado de lo cual las sumas de las filas y columnas valen $N-1$, divergiendo hacia infinito con N . Además, se cumple que $(N-1)/N \rightarrow 1$ conforme N crece. Esto implica que la matriz de ponderaciones espaciales que se obtiene para el caso de la *solución perfecta* debería excluirse formalmente por razones de consistencia, al no cumplirse ni la condición a) ni la condición b). Ahora bien, la resolución de este problema cuando se trabaja con datos reales y

tamaños muestrales finitos, donde numéricamente el óptimo no converge hacia la *solución perfecta*, plantea un reto. La cuestión es si existe un óptimo local próximo a este óptimo global no válido, y si es posible programar los modelos SAR, SEM y SDM para poder alcanzar ese óptimo local. Benjanuvatira y Burridge (2015) han investigado este aspecto detectando el mismo problema. Aunque el primer teorema de su trabajo demuestra la identificabilidad de los parámetros (incluido el de *distance decay*) cuando se encuentran próximos a sus valores verdaderos, supuesto un N que tiende a infinito, los autores encuentran problemas numéricos para obtener esos valores computacionalmente. De hecho, en sus estudios de simulación de Monte Carlo obtienen una serie de estimaciones extremas, imprecisas o absurdas debido a la existencia de máximos locales. Por consiguiente, en la siguiente sección investigamos más a fondo este punto para el modelo SAR.

4. SDM: SLX más un retardo espacial en la endógena con W parametrizada

Consideremos una especificación de la matriz W basada en el enfoque *distance decay* de la ecuación [2]; vamos a denotar al parámetro *distance decay* de los retardos espaciales endógenos como γ_{wy} , y al mismo parámetro de los retardos espaciales exógenos como γ_{wx} . La primera cuestión a la que debemos dar respuesta es en qué intervalo o rango de valores queda definido γ_{wy} . La discusión que sigue ayuda a definir este intervalo basándonos en las dos condiciones a) y b) mencionadas anteriormente, de las que debe cumplirse al menos una para obtener un estimador máximo-verosímil consistente de los parámetros del modelo.

Consideremos un número infinito de unidades espaciales ordenadas en línea, es decir, la distancia de cada unidad a su vecina más próxima a la derecha y a la izquierda es d ; la distancia a su segunda vecina más próxima a la derecha y a la izquierda es $2d$, y así sucesivamente. Dado que los elementos de fuera de la diagonal de W tienen la forma $1/d_j^{\gamma_{wy}}$, la suma de cada fila es $2 \times [1/d^{\gamma_{wy}} + 1/(2d)^{\gamma_{wy}} + 1/(3d)^{\gamma_{wy}} + \dots]$, resultando una serie que será finita si $\gamma_{wy} > 1$ (véase Salas y Hille, 1990, p. 602) (2). Esto implica que la condición a) se cumple para valores del parámetro *distance decay* superiores a la unidad y que, en estas circunstancias, el estimador máximo-verosímil producirá estimaciones consistentes del parámetro. La condición b) se cumple si la ratio entre la suma de las filas y N es menor a la unidad, en caso de que N tienda a infinito. Esta ratio puede represen-

tarse como $2 \times [1/d^{\gamma_{wy}} + 1/(2d)^{\gamma_{wy}} + 1/(3d)^{\gamma_{wy}} + \dots]$, que es finita para $\gamma_{wy} > 0$ (3).

IV. COMPARACIÓN DE MODELOS ECONOMÉTRICOS ESPACIALES: ILUSTRACIÓN EMPÍRICA

1. Un modelo para la demanda de cigarrillos

Con fines ilustrativos, utilizamos el caso bien conocido de la demanda de cigarrillos de Baltagi y Li (2004). Estos datos se han utilizado en otros estudios econométricos espaciales. Fueron empleados por primera vez por Baltagi y Levin (1986, 1992), respectivamente, sobre los períodos 1963-1980 y 1963-1988. El cuadro n.º 2 proporciona una visión general de los diferentes estudios sobre esta base de datos, extraída de Elhorst (2016). El cuadro se completa con un estudio reciente de He y Lin (2015). En la actualidad, la mayoría de estudios controlan por efectos fijos tanto espaciales como temporales. Elhorst (2014) contrasta explícitamente tales controles y concluye que esa especificación es superior respecto a las que no incluye efectos fijos, individuales o temporales, y también es preferible al modelo de efectos aleatorios. Muchos estudios también incluyen la variable dependiente retardada en el tiempo para controlar por la persistencia del hábito de fumar. En ese caso, se pueden distinguir no solo efectos directos a corto y a largo plazo, sino también efectos de desbordamiento espacial; Elhorst (2013) y Debarsy *et al.* (2014) desarrollan la formulación matemática de esos efectos. La mayoría de los estudios comparten la idea de que deberían incluirse retardos espaciales de las exógenas, aunque no está claro cuál de las dos especificaciones, SDM o SDEM, es la que mejor describe los datos. Halleck Vega y Elhorst (2015) argumentan que la inclusión de un retardo espacial en la endógena es difícil de justificar, pues ello significaría que una variación en el precio o la renta de un estado particular afectaría potencialmente al consumo en todos los estados, incluso en aquellos desconectados según la matriz W (p. ej., California e Illinois). Por último, casi todos los estudios adoptan una matriz de contigüidades binaria estandarizada por filas. Una excepción es Debarsy *et al.* (2014) quienes se basan en los kilómetros de frontera que comparten dos estados vecinos, también estandarizada por filas. Los trabajos recientes de Kelejian y Piras (2014) y Halleck Vega y Elhorst (2015) han sido pioneros en tratar de avanzar con respecto al uso de una simple matriz de ponderaciones espaciales exógenas con ponderaciones fijas.

CUADRO N.º 2

ESTUDIOS ESPACIALES CON DATOS DE PANEL SOBRE LA DEMANDA DE CIGARRILLOS

ESTUDIO	PANEL	DINÁMICO	ESPACIAL	W
Baltagi y Levin (1986)	ETF o ETA	+	SLX, precio	-
Baltagi y Levin (1992)	EEF o EEA + EEF	+	SLX, precio	-
Baltagi y Li (2004)	EEF o EEA	-	SEM	CB
Elhorst (2005)	EEF + ETF	+	SDEM	CB
Elhorst (2013)	EEF + EFT	+	SDM	CB
Debarsy <i>et al.</i> (2014)	EEA	+	SDM	CB, km. frontera
Kelejian y Piras (2014)	EEF + EFT	-	SAR	Endógeno
Elhorst (2014)	EEF + ETF	-	SDM	CB
Halleck Vega y Elhorst (2015)	EEF + ETF	-	Todos	CB
SLX	CB	-	SLX	ID parametrizada
He y Lin (2015)	EEA	-	SAC	CB

Notas: EEF: efectos espaciales fijos; EEA: efectos espaciales aleatorios; ETF: efectos temporales fijos; ETA: efectos temporales aleatorios; Dinámico: + = Y_{t-1} incluido; Espacial: véase cuadro n.º 1 para abreviaturas; Todos: SAR, SEM, SLX, SAC, SDM, SDEM, GNS; W: CB: matriz de contigüidades binaria; ID: matriz inversa de distancias. Fuente: Elhorst (2016).

En el modelo sobre la demanda de cigarrillos, se pretende explicar las ventas reales per cápita de cigarrillos (C_{it} , donde i denota cada uno de los 48 estados de EE.UU. y $t = 1963, \dots, 1992$) mediante una ecuación en función del precio medio de venta del paquete de cigarrillos (P_{it}) y de la renta real disponible per cápita (I_{it}). Además, se toman logaritmos en las variables. Esta ecuación básica puede resolverse maximizando la función de utilidad cuyos argumentos son el consumo de cigarrillos y otros bienes de consumo, sujeto a una limitación presupuestaria de gasto (Chintagunta y Nair, 2011). El modelo se agrega por individuos, ya que el objetivo perseguido es explicar las ventas en los diferentes estados. Si el objetivo fuera modelizar el comportamiento a nivel de los individuos (p. ej., la reducción del número de fumadores, o el hábito de fumar en la adolescencia), podría aproximarse mejor utilizando microdatos. Blundell y Stoker (2007) revisan la situación y ofrecen soluciones para salvar la brecha entre el análisis micro y macro, señalando que ambos enfoques tienen un papel relevante que jugar. Nosotros utilizamos datos a nivel de estado y para facilitar la exposición controlamos por los efectos fijos espaciales y temporales, de acuerdo a los resultados de Elhorst (2014). La razón para considerar este caso es la propensión conocida de los consumidores a comprar cigarrillos en estados próximos, tanto de forma legal como ilegal, cuando existe una diferencia de precio que lo justifique, lo que se conoce como efecto contrabando (*bootlegging effect*).

2. Resultados de la estimación del modelo SLX

El cuadro n.º 3, primera columna, muestra los resultados utilizando el modelo SLX como punto de partida, con una matriz de contigüidades binaria estandarizada por filas; en la segunda columna se utiliza la inversa de la distancia con un valor del parámetro *distance decay* γ igual a uno; en la tercera, el parámetro *distance decay* se estima, y en la cuarta la función *distance decay* se especifica a través de una función exponencial negativa, y el parámetro correspondiente se estima.

La estandarización de una matriz de ponderaciones por filas, tomando como base las inversas de distancias o la distancia exponencial, afecta a la interpretación económica del modelo de *distance decay* (Kelejian y Prucha, 2010). Por ejemplo, el impacto de la unidad i sobre la unidad j no es el mismo que el de la unidad j sobre la unidad i , y la información sobre las proporciones que guardan entre sí los elementos de las diferentes filas de la matriz W se difumina. Por tanto, estandarizamos los elementos de la matriz W , construida con la distancia, utilizando el valor propio mayor de la matriz. Puesto que el modelo SLX no contiene retardos espaciales de Y , los efectos directos coinciden con las estimaciones de los coeficientes de las variables no espaciales (β_k) y los desbordamientos son los efectos asociados a las variables explicativas con retardo espacial (θ_k).

CUADRO N.º 3

RESULTADOS ESTIMADOS CON EL MODELO SLX, PARA EXPLICAR LA DEMANDA DE CIGARRILLOS CON MATRIZ W PARAMETRIZADA

	CB (1)	ID ($\gamma=1$) (2)	ID (3)	ED (4)	ID HETEROS- CEDASTICIDAD* (5)	2SLS (6)	ID γ^s (7)	ID GRAVEDAD (8)
Precio	-1,017 (-24,77)	-1,013 (-25,28)	-0,908 (-24,43)	-1,046 (-29,58)	-0,884 (-24,93)	-1,246 (-16,32)	-0,903 (-24,49)	-0,841 (-23,03)
Renta	0,608 (10,38)	0,658 (13,73)	0,654 (15,39)	0,560 (15,44)	0,76 (17,03)	0,591 (13,34)	0,667 (15,76)	0,641 (15,16)
$W \times$ precio	-0,220 (-2,95)	-0,021 (-0,34)	0,254 (3,08)	0,108 (2,08)	0,182 (3,02)	0,192 (3,00)	0,385 (1,81)	0,041 (0,87)
$W \times$ renta	-0,219 (-2,80)	-0,314 (-6,63)	-0,815 (-4,76)	0,129 (1,80)	-0,728 (-13,21)	-0,750 (-14,14)	-0,838 (-5,21)	-0,372 (-4,97)
$\gamma_{\text{distancia}}$			2,938 (16,48)	4,67 (9,99)	2,966 (24,39)	3,141 (11,11)		2,986 (11,50)
$\gamma_{\text{distancia precio}}$ en columna 7 y $\gamma_{\text{propia población}}$ en columna 8							5,986 (8,86)	-0,018 (-0,41)
$\gamma_{\text{distancia renta}}$ en columna 7 y $\gamma_{\text{población vecinos}}$ en columna 8							2,938 (17,70)	0,340 (2,63)
R^2	0,897	0,899	0,916	0,896	0,906	0,484	0,917	0,923
LogL	1.668,4	1.689,8	1.812,9	1.666,9	1.841,3		1.818,4	1.868,0
Test LM WY, W^s	-	0,27	27,56	0,47				
Test LM Wu, W^s	-	12,39	4,16	0,22				
Test LM WY, $W=CB$	0,30	0,40	5,13	0,72				
Test LM Wu, $W=CB$	0,01	12,67	0,14	11,59				
Prob. SDM	0,5502	0,0000	0,0000	0,3536				
Prob. SDEM	0,4498	1,0000	1,0000	0,6464				

Notas: Se controla por efectos fijos entre estados y a lo largo del tiempo en todas las especificaciones; estadísticos t entre paréntesis; las estimas de los coeficientes de las variables WX en el modelo SLX representan los efectos de desbordamiento.

* Especificamos $\sigma_i = \alpha_1 + \alpha_2 (1/Población_i)$ obteniendo que $\alpha_1=0,003$ (valor t: 14,14) y $\alpha_2=1,971$ (valor t: 7,11).

⁵ Matriz W similar a la utilizada para modelizar los retardos espaciales exógenos WX .

Mientras que los efectos directos del precio y la renta en las cuatro especificaciones mantienen un patrón estable, los de desbordamiento muestran bastante variabilidad. El efecto directo del precio de los cigarrillos fluctúa en un rango estrecho alrededor de -1, y el de la renta lo hace en torno a 0,6. En contraste, el efecto de desbordamiento del precio es negativo y altamente significativo cuando se adopta la matriz de contigüidades binaria (-0,220, valor t: -2,80), pero pierde toda significatividad al utilizar la matriz inversa de distancias (-0,021, valor t: -0,34); cuando se estima el parámetro *distance decay* se produce un cambio de signo, es significativo y consistente con la hipótesis del efecto *bootlegging* (0,254, valor t: 3,08). La estimación del parámetro *distance decay* es de 2,938 y también es significativa (valor t: 16,48). Todo lo anterior tiene sentido, ya que únicamente quienes viven cerca de la frontera del estado pueden beneficiarse, de forma diaria o semanal, de los precios más bajos del estado vecino, mientras que

los individuos que residen lejos de la frontera solo se benefician de los menores precios si visitan otros estados con fines diferentes o si el contrabando se produce en camiones cubriendo largas distancias. Los resultados también explican por qué la matriz inversa de las distancias, parametrizada, genera un ajuste mucho mejor que la matriz de contigüidades binaria: la interacción espacial en distancias cortas cae más rápidamente, mientras que esta caída es gradual en distancias largas, de acuerdo al principio de contigüidad binaria. El coeficiente de determinación, o R^2 , corrobora esta interpretación al aumentar respectivamente de 0,897 a 0,899 y a 0,916; lo mismo ocurre con el logaritmo de la función de verosimilitud, que aumenta de 1668,2 a 1689,8 y a 1812,9. Si se adopta una función *distance decay* de tipo exponencial, en lugar de la inversa de las distancias, la interpretación vuelve a cambiar. El efecto de desbordamiento del precio y el parámetro *distance decay* siguen siendo significativos, pero la magnitud del desbordamiento

espacial del precio se reduce en más de la mitad (0,129, valor t 1,80).

Al igual que en el caso del precio, el efecto de desbordamiento de la renta muestra un patrón irregular. Este efecto aumenta de magnitud cuando se pasa de la matriz de contigüidades binaria (-0,219, valor t: -2,80) a la matriz inversa de las distancias (-0,314, valor t: -6,63), y subsecuentemente a la matriz inversa de las distancias parametrizada (-0,815, valor t: -4,76), para cambiar de signo y volverse escasamente significativo (solo al 10%) cuando se adopta la matriz *distance decay* exponencial (0,129, valor t: 1,80). No obstante, dado que el R^2 y el logaritmo de la función de verosimilitud de la matriz *distance decay* exponencial son sustancialmente más bajos, esta última especificación debería ser rechazada. Obsérvese que un desbordamiento espacial de la renta con signo negativo implica que un aumento de la renta per cápita en el propio estado disminuye las ventas de cigarrillos en los estados vecinos. Una explicación podría consistir en que niveles de renta más altos reducen la necesidad o el incentivo para salir fuera del estado a comprar cigarrillos a precios más bajos.

Teniendo en cuenta los patrones cambiantes que se perciben en los efectos de desbordamiento, es interesante considerar el impacto de otros errores de especificación; el foco de atención recae en el efecto de desbordamiento del precio. Si se controla por heteroscedasticidad, como en la columna quinta, por endogeneidad, como en la columna sexta, o si se considera un γ separado por cada variable explicativa, como en la columna séptima, el signo y los niveles de significación de los desbordamientos del precio y de la renta son similares a los resultantes de la matriz inversa de distancias parametrizada de la tercera columna, pero las magnitudes estimadas siguen oscilando. A continuación, tratamos de profundizar en esta discusión.

Anselin (1988), hace más de veinticinco años, defendió la incorporación de perturbaciones heteroscedásticas en los modelos econométricos espaciales. Dado que el consumo transfronterizo podría verse afectado por diferencias en el tamaño de la población entre los estados, controlamos por heteroscedasticidad utilizando una forma funcional predefinida (4). Siguiendo a Anselin (1988, pp. 34-35), especificamos $\sigma_{it} = \alpha_1 + \alpha_2 (1/\text{población}_{it})$ y estimamos el modelo correspondiente con un procedimiento en dos etapas en el que las α s y el γ por un lado y las β s por el otro son estimados alternativamente hasta lograr la convergencia. Estos resulta-

dos se reportan en la quinta columna del cuadro n.º 3. Puede valorarse el patrón de heteroscedasticidad contrastando la hipótesis $\alpha_2=0$. El estadístico ratio de verosimilitud, con un grado de libertad, es igual a $2 \times (1841,3 - 1812,9) = 56,8$ que es altamente significativo para una χ^2 . Este resultado debería alertar a los usuarios en cuestiones de econometría espacial de la necesidad de prestar más atención a la existencia de heteroscedasticidad. De hecho, al hacerlo, el efecto de desbordamiento del precio disminuye de 0,254 a 0,182.

Otro aspecto tiene que ver con la cuestión de si los precios de los cigarrillos son o no endógenos. A tal efecto, recurrimos al test de Hausman para detectar la posible endogeneidad complementado con el correspondiente test para examinar la validez de los instrumentos; en concreto, para evaluar si estos cumplen los criterios de relevancia y de exogeneidad. Como variables instrumentales se utilizan el impuesto sobre los cigarrillos, la compensación estatal por empleado en estados vecinos, la renta en el propio estado y la renta en estados vecinos (estas dos últimas ya forman parte del modelo SLX). Una exposición más detallada aparece en Halleck Vega y Elhorst (2015), quienes concluyen que el precio de los cigarrillos observado en los estados vecinos es susceptible de utilizarse como determinante exógeno de la demanda de cigarrillos en el conjunto de EE.UU., a diferencia del precio de los cigarrillos observado en el propio estado, que no parece serlo. Aparentemente, el consumo tiene efectos de retroalimentación sobre el precio dentro del propio estado; sin embargo, si los consumidores deciden comprar menos cigarrillos en estados vecinos debido a un aumento en el precio de su propio estado, habrá un impacto significativo en los precios de esos estados. Una vez tenida en cuenta la endogeneidad, el efecto de desbordamiento del precio disminuye de 0,254 a 0,192.

Finalmente, si en lugar de un parámetro de *distance decay* común para todas las variables explicativas, se estima un parámetro específico para cada variable explicativa, el efecto de desbordamiento del precio aumenta de 0,254 a 0,385.

A diferencia de las tres extensiones comentadas, la sensibilidad de los desbordamientos espaciales del precio y de la renta vuelve a aumentar cuando los elementos de la matriz de ponderaciones espaciales se parametrizan utilizando un modelo de gravedad (véase la columna número 8). El efecto de desbordamiento espacial del precio de los cigarrillos sigue siendo positivo, pero ya no es significativo, en tanto

que el efecto de desbordamiento espacial de la renta disminuye en más de la mitad comparado con las extensiones de las columnas tres, cinco y seis, aunque sigue siendo negativo y significativo.

3. Contrastes de SLX frente a SDM o SDEM

En el cuadro n.º 3 también se detallan los resultados usando el método bayesiano, de LeSage (2014), y los test LM robustos (Anselin *et al.*, 1996); el objetivo de ambos es contrastar si la hipótesis de *spillovers* locales es más verosímil que la de *spillovers* globales. En un caso enfrentamos el modelo SLX con la versión ampliada incluyendo un retardo espacial de la endógena, WY , y en el segundo incluimos en el modelo SLX un retardo espacial en el término de error, Wu . Además, consideramos dos versiones de los test LM robustos (5); en la primera se utiliza la misma matriz W en los dos retardos espaciales de la ecuación mientras que en la segunda el retardo espacial añadido proviene de una matriz de contigüidades de tipo binario. Los test LM robustos se basan en los residuos del modelo SLX y siguen una distribución Chi-cuadrado con un grado de libertad; el valor crítico al nivel de significación del 5% es de 3,84.

De acuerdo al enfoque bayesiano, la especificación con *spillovers* globales (SDM) es más verosímil que la local cuando se adopta una especificación de la matriz W de contigüidades binaria; las respectivas probabilidades *a posteriori*, condicionadas a esa matriz se encuentran entre 0,55 y 0,45. Sin embargo, cuando se adopta la matriz inversa de la distancia, restringida con valor 1 o no restringida de ninguna forma, las matrices se hacen más densas y la proporción pasa a ser 0 y 1. Por último, cuando se adopta la matriz de tipo exponencial con la distancia, la relación se reduce hasta un rango entre 0,35 y 0,65. Por consiguiente, el SDEM parece ser la extensión más adecuada del modelo SLX.

La lectura difiere cuando se emplean los test LM robustos. Si se adopta la matriz de contigüidades binaria, los test LM no son concluyentes ya que no son significativos. Cuando se adopta la matriz inversa o exponencial con la distancia, los test LM apuntan a la especificación SDEM, es decir, el mismo resultado que en el método bayesiano. Sin embargo, al tomar como punto de partida la matriz inversa de la distancia, con parámetros no restringidos, se obtiene resultados diferentes. El método bayesiano se decanta a favor del SDEM, mientras que los test de LM lo hacen a favor del SDM. Por

este motivo, a continuación consideramos ambas extensiones del modelo SLX con más detalle.

4. Resultados de la estimación SDEM

En la primera columna del cuadro n.º 4 se detallan los resultados del modelo SLX ampliado al incluir el retardo espacial del error. Por los motivos señalados en la segunda sección, utilizamos la matriz de contigüidades binaria en lugar de la matriz inversa de la distancia, no restringida, que se utiliza para modelizar los retardos de las variables exógenas. El test de Hausman, de acuerdo a Pace y LeSage (2008, sección 3.3.1), es igual a 0,9267 y sigue una distribución Chi-cuadrado con cuatro grados de libertad (igual al número de parámetros de la ecuación). El p valor correspondiente es igual a 0,9207. Dado que con el test de Hausman no puede rechazarse que las estimaciones de los modelos SLX y SDEM sean iguales, y que el coeficiente de autocorrelación de los residuos es significativo (0,164 con valor t : 4,58), se debe concluir que la extensión SDEM conduce (a lo sumo) a una ganancia de eficiencia.

5. Resultados de la estimación de SDM

En la segunda columna del cuadro n.º 4 aparecen los resultados del modelo SLX ampliado con un retardo espacial en la variable dependiente, donde W , al igual que en el caso anterior, se corresponde con la matriz de contigüidad binaria. El valor del logaritmo de la función de verosimilitud de este modelo, (1821,7), es mayor que el de su homóloga bajo la especificación SDEM, (1819,2), lo cual está en línea con los resultados de los test LM reportados en la tercera columna del cuadro n.º 3.

En esa misma columna del cuadro n.º 4 aparecen los resultados del modelo SLX ampliado con un retardo espacial en la variable dependiente. La diferencia es que en lugar de imponer *a priori* una matriz de contigüidades binaria para la matriz W , utilizamos las inversas de las distancias con un parámetro de *distance decay*, no restringido. La parametrización de la matriz W , en modelos con retardo espacial en la endógena, se ve dificultado por el problema de la *solución perfecta*, como ya se discutió en la tercera sección. El gráfico 1 muestra el logaritmo de la función de log-verosimilitud para el parámetro de *distance decay* de la matriz W asociado al retardo espacial en la endógena, donde γ_{WY} toma valores en el intervalo (0,10] con incrementos de 0,1. El problema de la *solución*

CUADRO N.º 4

MÁS ALLÁ DEL MODELO SLX CON W PARAMETRIZADA: SDEM Y SDM

	SDEM $ID + \lambda W_{BC}U$ (*)	SDM(a) $ID + \rho W_{BC}Y$ (**)	SDM(b) $ID + \rho W_{ID}(\gamma_{WY})Y$ (***)	
Estimaciones centrales				
Precio	-0,841 (-23,03)	-0,881 (-23,13)	-0,894 (-24,60)	
Renta	0,641 (15,16)	0,588 (13,35)	0,665 (16,27)	
W×precio	0,041 (0,87)	0,288 (4,68)	0,076 (1,30)	
W×renta	-0,372 (-4,97)	-0,804 (-16,04)	-0,932 (-17,54)	
W×u	0,164 (4,58)	-	-	
W×Y	-	0,143 (5,19)	-0,208 (-3,78)	
γ_{WX}	2,904 (21,36)	3,134 (12,61)	3,035 (15,43)	
γ_{WY}	-	-	5,540 (0,971)	
Efectos directos			(b1)	(b2)
Precio	-0,841 (-23,03)	-0,885 (-23,60)	-0,903 (-23,87)	-0,896 (-22,77)
Renta	0,641 (15,16)	0,592 (13,66)	0,671 (16,18)	0,668 (15,36)
Efectos desbordamiento				
Precio	0,041 (0,87)	-0,102 (4,43)	0,162 (4,32)	0,028 (0,24)
Renta	-0,372 (-4,97)	-0,019 (-4,37)	-0,125 (-4,40)	-0,025 (-0,29)
R ²	0,916	0,918	0,918	
LogL	1819,2	1821,7	1868,0	

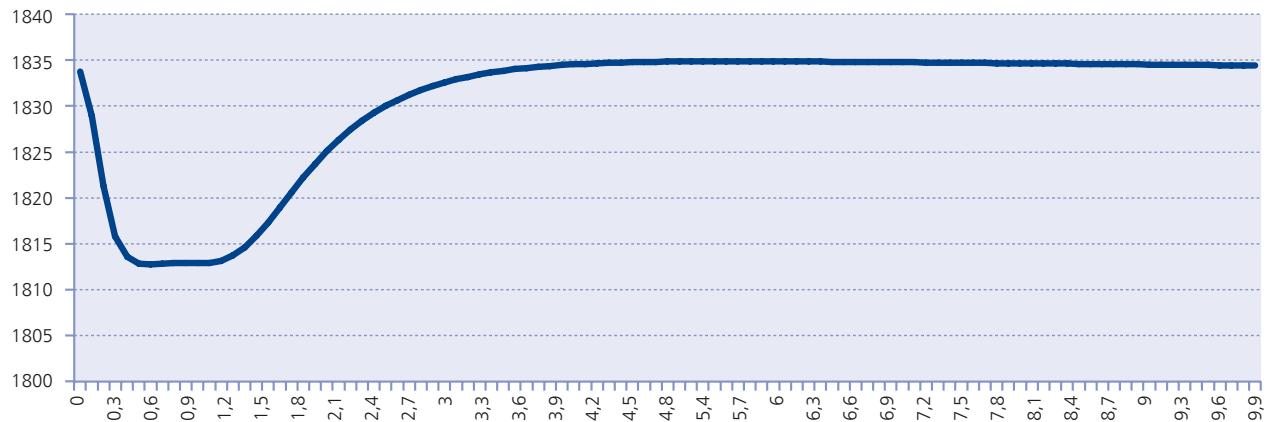
Notas: Se controla por efectos fijos entre estados y a lo largo del tiempo en todas las especificaciones; los estadísticos t se muestran entre paréntesis. La W de las variables WX está parametrizada como dividiendo $w_{ij} = 1/d_{ij}$ y estimándose el valor γ . * SDEM=SLX ampliado con Wu donde W es una matriz de contigüidades binaria. ** SDM=SLX ampliado con WY donde W es una matriz de contigüidades binaria. *** SDM=SLX ampliado con WY donde W es una matriz inversa de distancias parametrizada, $w_{ij} = 1/d_{ij}$ y se utilizan diferentes parámetros γ para WY y para WX (véase sección cuarta para más detalles).

perfecta se aprecia cuando el parámetro *distance decay* se acerca a $\gamma_{WY} = 0$. Otra observación importante que se deduce del gráfico 1 es que la función no es cóncava, ni siquiera cuando se consideran valores de $\gamma_{WY} > 1$. Aunque existe un máximo, en las proximidades de 5,54, existen otros valores de γ_{WY} que producen valores similares al máximo. En breve, volveremos sobre este resultado.

Comparando el SDEM y el SDM(a), se advierten fuertes diferencias en relación a los efectos de desbordamiento. De hecho, aunque los efectos de desbordamiento son muy significativos bajo ambas especificaciones, ¡muestran signos opuestos! Mientras que el efecto de desbordamiento del precio en

el modelo SLX es positivo, corroborando el efecto contrabando, y el de la renta es negativo, estos efectos cambian de signo en el modelo SDM(a) si la matriz W se especifica de tipo binario. Dicho de otro modo, aunque la bondad del ajuste es superior, en términos del R² o de logverosimilitud, esto no constituye una mejora desde un punto de vista teórico más general. El modelo SDM(b) asegura un mejor ajuste desde ambas perspectivas. Los efectos de desbordamiento, que aparecen en (b1) en la tercera columna del cuadro n.º 4, tienen el mismo signo que en el caso del modelo SDEM y los niveles de significación son comparables. Una diferencia reseñable es que la magnitud del efecto de desbordamiento de la renta en el modelo SDM(b)

GRÁFICO 1
FUNCIÓN LOGARITMO DE LA VEROSIMILITUD PARA EL PARÁMETRO γ_{WY} TOMANDO COMO BASE EL CONJUNTO DE DATOS REFERIDOS A LA DEMANDA DE CIGARRILLOS



Nota: Los valores de γ_{WY} se encuentran comprendidos en el intervalo (0, 10] utilizando incrementos de 0,1.

es mucho más bajo (en valor absoluto) que en el modelo SDEM, $-0,125$ frente a $-0,372$, e inferior asimismo al valor obtenido en el modelo SLX, de $-0,815$. Por último, la estimación puntual de ρ en el modelo SDM(b) es negativa y muy significativa, lo que proporciona evidencia adicional en favor de la existencia de un efecto competencia, junto a los efectos de desbordamiento derivados del precio y de la renta. En conjunto, estos resultados confirman que la discusión del modelo econométrico espacial más idóneo, y de la mejor forma funcional en W es muy relevante porque las decisiones que se tomen aquí afectan considerablemente a la magnitud y a la significación de los efectos de desbordamiento.

Debe enfatizarse el hecho de que los efectos de desbordamiento resultantes del modelo SDM(b) están condicionados a la exogeneidad de W , es decir, las estimaciones de esos efectos están calculadas suponiendo un valor fijo para el parámetro de *distance decay* γ_{WY} , con un valor de 5,54 en nuestra aplicación. Este valor es muy superior al de γ_{WX} , mientras que el estadístico t , 0,971, no es significativo. Pese a ello, como se observa en el gráfico 1, existe una gran incertidumbre respecto a cómo debería especificarse la matriz W de WY . Esta incertidumbre puede ser uno de los motivos por los que muchos estudios aplicados aseveran que sus resultados son robustos a la especificación de W , como en el gráfico 1, donde el logaritmo de la función de verosimilitud apenas cambia de valor

para $\gamma_{WY} > 4$. Este resultado, que suele apuntarse como un punto fuerte de la especificación, podría ser, sin embargo, una debilidad. De hecho, al sostener que los resultados –generalmente las estimaciones de los parámetros de respuesta– son robustos a la especificación de W , el investigador está diciendo que no tiene seguridad sobre la verdadera especificación de W ; el problema aumenta porque, como hemos visto, el impacto de las especificaciones diferentes de W sobre los efectos de desbordamiento es muy relevante.

Para corroborar la importancia de la incertidumbre asociada a la especificación de la matriz W , simulamos las estimaciones de los efectos del modelo SDM(b), incorporando la variabilidad de γ_{WY} en lugar de tratarlo como fijo. Las estimaciones de estos efectos aparecen en (b2), en la tercera columna del cuadro n.º 4. Dado que las estimaciones de los parámetros son las mismas que en el caso del SDM(b), omitimos más comentarios. De nuevo, los efectos directos se mantienen estables. La diferencia fundamental aparece en el impacto de los efectos de desbordamiento (tanto relativos a la variable precio como a la variable renta), que son pequeños y poco significativos cuando el parámetro de *distance decay* no se restringe. En consecuencia, lo que se observa en esta aplicación es que hay efectos de desbordamiento significativos condicionados a la especificación de W . Solo podemos afirmar que existe evidencia de *spillovers* (p. ej., de *contrabando*) si estamos dispuestos a aceptar que la matriz

W es exógena. El hecho de que el logaritmo de la función de verosimilitud para γ_{WY} (gráfico 1) no sea estrictamente cóncavo, e incluso bastante plana, sugiere problemas de identificación al no existir un único máximo global. Por tanto, parece que los modelos econométricos espaciales que contienen un retardo espacial de la endógena (es decir, con *spillovers* globales) pueden presentar más problemas de identificación.

Por último, el gráfico 1 indica que limitar el intervalo del parámetro de *distance decay* a regiones concretas como, por ejemplo, $[1, 2]$ o $[1, 4]$ puede ser bastante restrictivo. El verdadero parámetro de *distance decay* puede estar fuera del intervalo definido por el investigador, como sucede con los resultados para la demanda de cigarrillos donde la estimación es bastante elevada comparada con los valores que se han manejado normalmente en la investigación aplicada.

V. CONCLUSIONES

Recientemente, Halleck Vega y Elhorst (2015) recomendaron emplear el modelo SLX como punto de partida cuando un estudio se dirige a analizar los efectos de desbordamiento espacial, y no se cuenta con una teoría subyacente que justifique la utilización de un modelo concreto. Esta recomendación se basa en que el SLX constituye el modelo econométrico espacial más simple que genera *spillovers* flexibles, y además, a diferencia de otros modelos, la matriz de ponderaciones espaciales W es fácilmente parametrizable.

Hace más de una década, Leenders (2002) demostró que la especificación de la matriz W tiene una importancia vital a la hora de estimar los modelos SAR o SEM, ya que tanto el valor como la significatividad del parámetro asociado al retardo espacial respectivo dependen de la especificación de W . El presente estudio corrobora las conclusiones de Leenders. En concreto, en lugar de centrarnos en modelos con un solo retardo espacial, como el SAR o SEM, adoptamos modelos con múltiples retardos espaciales, como es el caso del modelo SLX. Además, no nos limitamos a obtener las estimaciones de los parámetros correspondientes ya que consideramos todos los efectos de desbordamiento espacial existentes en las ecuaciones. El modelo SLX tiene la propiedad de que las estimaciones de los parámetros asociados a los retardos espaciales de las exógenas (WX) coinciden con los efectos de desbordamiento espacial; esta propiedad es muy interesante como punto de partida en estudios empíricos.

En nuestro artículo, comprobamos que el signo, la magnitud y la significatividad de los efectos de desbordamientos son sensibles tanto a la especificación de W como a la especificación del modelo; para ilustrarlo hemos utilizado el modelo de demanda de cigarrillos de Baltagi y Li (2004) basado en un panel de datos para 46 estados de EE.UU. durante el período 1963-1992. Lo primero que hemos contrastado es la propia especificación SLX introduciendo seis alternativas diferentes de la matriz W , que van desde una matriz de contigüidades binaria hasta la basada en un modelo de gravedad, con el ánimo de reflejar la intensidad de los flujos entre las unidades espaciales de la muestra. En segundo lugar, hemos controlado por la heterocedasticidad y la endogeneidad, y hemos extendido el modelo para incluir un retardo espacial en el término de error o en la variable dependiente. Los efectos de desbordamiento estimados en los precios oscilan entre un valor negativo y significativo de -0,102, y otro positivo y también significativo de 0,417. De modo similar, los efectos de desbordamiento de la renta oscilan entre un valor negativo, y significativo, de -0,901 y otro positivo, pero poco significativo (solo al 10%) de 0,129. La afirmación común en muchos estudios aplicados de que los resultados son robustos a la especificación de la matriz W no parece suficientemente justificada, lo cual podría deberse a que, en esos estudios, la atención se centra principalmente en los efectos directos. En nuestro caso, hemos constatado que, sea cual sea la especificación de la matriz de ponderaciones espaciales y el modelo econométrico que se adopte, los efectos directos del precio y la renta fluctúan, respectivamente, en torno a -1 y a 0,6. También podría ser que el valor del logaritmo de la función de verosimilitud apenas experimente variaciones para un rango específico del parámetro *distance decay* cuando la matriz W no está restringida, como se muestra en la última parte de la cuarta sección. La conclusión necesariamente ha de ser que los estudios en los que se enfatiza la robustez de los resultados a la especificación de la matriz de ponderaciones espaciales deberían prestar mayor atención a los efectos de desbordamiento, además de considerar también otras matrices de ponderaciones con propiedades diferentes. Las matrices de ponderaciones espaciales que poseen una naturaleza similar, tales como la matriz inversa de distancias, para diferentes valores del parámetro de *distance decay*, o las matrices de los k vecinos más próximos para diferentes valores de k , resultan menos útiles.

Los estadísticos de contraste para dilucidar si se requiere ampliar el modelo SLX a una configuración

SDM o SDEM todavía se encuentran en fase embrionaria porque el modelo SLX ha recibido poca atención tanto en la literatura teórica como en los estudios aplicados. El comportamiento de los populares test LM (robustos) solo se ha investigado para el modelo MCO, pero no a partir del modelo SLX. Ello podría explicar por qué, en nuestra aplicación, los test LM robustos, a diferencia del enfoque bayesiano, apuntan al modelo SDM en lugar de al modelo SDEM, cuando se toma como punto de partida el modelo SLX con la matriz inversa de distancias no restringida. No obstante, al estimar posteriormente el modelo SDM, no se obtiene ninguna mejora desde el punto de vista de la interpretación económica del modelo, únicamente desde una perspectiva estadística. Una explicación de por qué el enfoque bayesiano se decanta por el modelo SDEM, estriba en que compara la eficacia de dos modelos en todo el espacio paramétrico; sin embargo, los test LM (robustos) solo comparan la eficacia de un modelo frente a otro en base a estimaciones de los parámetros, específicas para la muestra y los intervalos predefinidos. A pesar de esta ventaja, hay margen para la mejora; el enfoque bayesiano asume que la matriz de ponderaciones espaciales es la misma para cada retardo espacial, mientras que la evidencia empírica apoya el supuesto de que estas matrices podrían ser diferentes. En resumen, estos hallazgos abren líneas de estudio interesantes para futuras investigaciones.

Pese a todas estas incertidumbres, podemos concluir que hemos encontrado evidencia empírica a favor del efecto contrabando o *bootlegging*. Un incremento del precio de un 1 por 100 en un estado provoca un desplazamiento del consumo desde dicho estado hacia otros estados vecinos de alrededor de 0,1-0,3 por 100. Además, podemos sostener que un aumento de la renta disponible de un 1 por 100 en un estado disminuye el consumo en los estados vecinos entre un 0,2 y un 0,9 por 100. Estos intervalos son más reducidos que los rangos obtenidos con anterioridad en la literatura; de hecho, los resultados fuera de dichos rangos deberían ser rechazados desde un punto de vista estadístico y, en parte, también en base a argumentos económicos.

NOTAS

(*) Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Groningen, PO Box 800, 9700 AV Groningen, Holanda, e-mail: j.p.elhorst@rug.nl, s.m.halleck.vega@rug.nl

(**) Paris School of Economics, Centre d'Economie de la Sorbonne, Universidad de París 1 Panthéon-Sorbonne, 106/112 Blvd. de l'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13, e-mail: solmaria.halleck@univ-paris1.fr

Los autores agradecen a JAN JACOBS, FEI JIN y ALAIN PIROTTE sus comentarios a una versión anterior de este trabajo.

(1) El modelo SAR es un caso especial del SDM, de la ecuación [6], que se obtiene al hacer $\theta=0$. El modelo SEM puede reescribirse como un modelo SDM sujeto a la restricción ($\theta=-\rho\beta$), lo cual explica por qué la *solución perfecta* del SDM también resulta aplicable para el SEM.

(2) En un espacio continuo, la suma de la fila puede representarse por el área comprendida bajo la gráfica $f(d)=1/d^\gamma$ para $1 \leq d < N$, donde N tiende a infinito. Calculando la integral de la función $f(d)$ para la totalidad de este intervalo, obtenemos $1/(\gamma-1) (1 - 1/(N^{\gamma-1}))$, que es finito para $\gamma > 1$ conforme N tiende a infinito.

(3) La división de la suma de la fila por N da un resultado equivalente a dividir $f(d)=1/d^\gamma$ entre d , lo que puede representarse por $g(x)=1/d^{(\gamma+1)}$. El área comprendida bajo esta función es $1/\gamma (1 - 1/N^\gamma)$, que es finito para $\gamma > 0$ conforme N tiende a infinito.

(4) KELEJIAN y PRUCHA (2010) consideran un enfoque no paramétrico para tener en cuenta la heteroscedasticidad.

(5) Además de la versión robusta, también calculamos los estadísticos LM clásicos. Estos últimos no son informativos porque apuntan en favor de ambos tipos de extensiones (en el error y en la endógena). Por este motivo, no se han incluido en el texto. Debe recordarse que los contrastes que aparecen en el cuadro n.º 3 se denominan robustos porque contrastan la posible existencia de un tipo de dependencia espacial en presencia de la otra.

BIBLIOGRAFÍA

- ANSELIN, L. (1988), *Spatial econometrics: methods and models*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- ANSELIN, L.; BERA, A. K.; FLORAX, R., y M. J. YOON (1996), «Simple diagnostic tests for spatial dependence», *Regional Science and Urban Economics*, 27: 77-104.
- AQUARO, M.; BAILEY, N., y M. H. PESARAN (2015), *Quasi maximum likelihood estimation of spatial models with heterogeneous coefficients*, USC-INET Research Paper No. 15-17. Disponible en SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2623192>, <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2623192>.
- BAILEY, N.; HOLLY, S., y M. H. PESARAN (2016), «A two-stage approach to spatio-temporal analysis with strong and weak cross-sectional dependence», *Journal of Applied Econometrics*, 31: 249-280.
- BALTAGI, B. H., y D. LEVIN (1986), «Estimating dynamic demand for cigarettes using panel data: the effects of bootlegging, taxation and advertising reconsidered», *The Review of Economics and Statistics*, 68: 148-155.
- (1992), «Cigarette taxation: raising revenues and reducing consumption», *Structural Change and Economic Dynamics*, 3: 321-335.
- BALTAGI, B. H., y D. LI (2004), «Prediction in the panel data model with spatial autocorrelation», en ANSELIN, L.; FLORAX, R., y REY, S. J. (eds.): *Advances in spatial econometrics: methodology, tools, and applications*, Springer, Berlin, pp. 283-295.
- BAVAUD, F. (1998), «Models for spatial weights: a systematic look», *Geographical Analysis*, 30: 153-171.
- BEHRENS, K.; ERTUR, C., y W. KOCH (2012), «'Dual' gravity: using spatial econometrics to control for multilateral resistance», *Journal of Applied Econometrics*, 27: 773-794.
- BENJANUVATRA, S., y P. BURRIDGE (2015), *QML estimation of the spatial weight matrix in the MR-SAR model*, DERS University of York working paper, York.
- BLUNDELL, R., y T. M. STOKER (2007), «Models of aggregate economic relationships that account for heterogeneity», en HECKMAN, J. J., y LEAMER, E. (eds.): *Handbook of econometrics*, Vol. 6A, Elsevier, Amsterdam: 4609-4663.

- BURRIDGE, P.; ELHORST, J. P., y K. ZIGOVA (2016), «Group interaction in research and the use of general nesting spatial models», en PACE, K.; LESAGE, J. P., y BALTAGI, B. (eds.): *Advances in econometrics, volume 37, Spatial and Spatiotemporal Econometrics*, Elsevier, Forthcoming, Amsterdam.
- CHINTAGUNTA, P. K., y H. S. NAIR (2011), «Discrete-choice models of consumer demand in marketing», *Marketing Science*, 30: 977-996.
- CORRADO, L., y B. FINGLETON (2012), «Where is the economics in spatial econometrics?», *Journal of Regional Science*, 52: 210-239.
- DEBARSY, N.; ERTUR, C., y J. P. LESAGE (2012), «Interpreting dynamic space-time panel data models», *Statistical Methodology*, 9: 158-171.
- ELHORST, J. P. (2005), «Unconditional maximum likelihood estimation of linear and log-linear dynamic models for spatial panels», *Geographical Analysis*, 37: 85-106.
- (2013), «Spatial panel models», en FISCHER, M. M., y NIJKAMP, P. (eds.): *Handbook of regional science*, Springer, Berlin: 1637-1652.
- (2014), «Matlab software for spatial panels», *International Regional Science Review*, 37: 389-405.
- (2016), «Spatial Panels», en SHEKHAR, S., y XIONG, H. (eds.): *Encyclopedia of GIS*, 2ª ed., Springer, Forthcoming, Berlin.
- ELHORST, J. P.; ABREU, M.; AMARAL, P.; BHATTACHARJEE, A.; CORRADO, L.; FINGLETON, B.; FUERST, F.; GARRETSEN, H.; IGLIORI, D.; LE GALLO, J.; McCANN, P.; MONASTIROTIS, V.; PRYCE, G., y J. YU (2016), «Editorial: raising the bar (1)», *Spatial Economics Analysis*, 11: 1-6.
- HALLECK VEGA, S., y J. P. ELHORST (2015), «The SLX model», *Journal of Regional Science*, 55: 339-363.
- (2016), «A regional unemployment model simultaneously accounting for serial dynamics, spatial dependence and common factors», *Regional Science and Urban Economics*, forthcoming.
- HE, M., y K.-P. LIN (2015), «Testing random effects panel data models with spatially autocorrelated error components and spatially lagged dependent variables», *Econometrics* 3: 761-796.
- KELEJIAN, H. H., y G. PIRAS (2014), «Estimation of spatial models with endogenous weighting matrices, and an application to a demand model for cigarettes», *Regional Science and Urban Economics*, 46: 140-149.
- KELEJIAN, H. H., y I. R. PRUCHA (1998), «A generalized spatial two stage least squares procedure for estimating a spatial autoregressive model with autoregressive disturbances», *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 17: 99-121.
- (1999), «A generalized moments estimator for the autoregressive parameter in a spatial model», *International Economic Review*, 40: 509-533.
- (2010), «Specification and estimation of spatial autoregressive models with autoregressive and heteroskedastic disturbances», *Journal of Econometrics*, 157: 53-67.
- LEE, L.-f. (2004), «Asymptotic distribution of quasi-maximum likelihood estimators for spatial autoregressive models», *Econometrica*, 72: 1899-1925.
- LEENDERS, R. T. A. J. (2002), «Modeling social influence through network autocorrelation: Constructing the weight matrix», *Social Networks*, 24: 21-47.
- LESAGE, J. P. (2014), «Spatial econometric panel data model specification: a Bayesian approach», *Spatial Statistics*, 9: 122-145.
- (2015), «Software for Bayesian cross section and panel spatial model comparison», *Journal of Geographical Systems*, 17: 297-310.
- LESAGE, J. P., y R. K. PACE (2009), *Introduction to spatial econometrics*, Taylor and Francis, Boca Raton, FL.
- McMILLEN, D. P. (2012), «Perspectives on spatial econometrics: linear smoothing with structured models», *Journal of Regional Science*, 52: 192-209.
- PACE, R. K., y J. P. LESAGE (2008), «A spatial Hausman test», *Economics Letters*, 101: 282-284.
- SALAS, S. L., y E. HILLE (1990), *Calculus*, 6th edition, Wiley, Nueva York.
- STAKHOVYCH, S., y T. H. A. BIJMOLT (2009), «Specification of spatial models: a simulation study on weights matrices», *Papers in Regional Science*, 88: 389-408.
- YU, J., y L. F. LEE (2015), «Estimating a spatial autoregressive model with an endogenous spatial weight matrix», *Journal of Econometrics*, 184, 209-232.