

自己相関を持つ価格モデルと線形需要モデルによるサプライチェーンのダイナミクスと経済性

青山学院大学 細田高道

University of Exeter Business School Stephen M. Disney

University of Groningen Gerard Gaalman

1. 概要

本研究は、価格変化に需要量が反応する線形の需要量モデルを想定し、サプライチェーンのダイナミクスと経済性を数理的に解明することを試みたものである。市場価格は自己相関を持つ AR(1)モデルとし、需要量は直近の二つ(現在と一期前)の市場価格の加重平均値の影響を受ける線形モデルとしている。これらの前提を置いた場合、最終的な需要量モデルは ARMA(1,1)モデルとなることを見出した。つまり、線形の需要量モデルはボックス・ジェンキンス型時系列モデルに収斂する場合があることを示したことになる。さらに、直近の二つの市場価格の重みの違いが組織の利益にどのように影響するかを数値分析により示した。Order-Up-To(OUT)ポリシーを想定した上で利益関数を設定し数値分析を実施した結果、価格変化に鈍感な製造業者であるほど(予想に反して)利益が高くなることを見出した。

2. 文献レビュー

市場価格を確率的なモデルとし、需要量は市場価格の線形モデルとする研究はこれまでもされてきている。例えば、Wang et al. (2014)は市場価格を白色雑音として表現している。Giri & Glock (2022)は、ARMA(1,1)型の市場価格モデルと確率的線形需要モデルを前提とし再生サプライチェーンにおけるダイナミクスを研究している。需要モデルは ARMA(1,1)モデルにて表現できることが示され、またブルウィップ効果の有無は、市場価格のパラメータ値および価格感度係数に大きく依存することを解明している。

また、市場価格を決定変数とし、需要をその市場価格の関数とする研究アプローチも見受けられる。在庫量に基づいたダイナミックプライシングの研究、例えば Shen et al. (2018)、やサプライチェーン契約の調整の研究、例えば Gong et al. (2022)、の系統である。Cohen et al. (2022)は、市場価格の影響を受ける供給のモデルを用いて決定論的価格応答型需要モデルの下での消費者余剰を検討している。使用された需要モデルは、市場価格を用いた一般的な関数である。加法的および乗法的なノイズ成分を持つ2種類の確率的需要モデルが検討されている。その結果、需要と供給における不確実性が消費者余剰に大きな影響を与えることを示した。

本研究は前半に示したカテゴリーに該当し、特に

顧客の市場価格への反応が最終的に企業の利益にどのように影響するかに注目したところに特徴がある。

3. モデル

市場は完全競争市場とし、供給者は price taker, つまり市場価格をコントロールすることはできないと仮定する。市場価格は一次の自己相関をもつ AR(1)型のモデルとする:

$$p_t = \mu_p + \phi(p_{t-1} - \mu_p) + \varepsilon_t.$$

ここで p_t は時間 t における市場価格、 μ_p は市場価格の平均値、 ϕ は自己相関係数、 ε_t は平均値ゼロおよび固定値の標準偏差 σ をもつ白色雑音である。Wang et al. (2014) においては市場価格は白色雑音と仮定されており、本研究はその仮定を自己相関と持つモデルへと拡張したものとなる。需要量は現在と一期前の市場価格の線形モデルで表現できるとする:

$$d_t = a - b((1-w) + p_t + wp_{t-1})$$

ここで a は市場ポテンシャルであり、最大市場規模を表している。 b は正の価格感度係数である。重み付け係数 $0 \leq w \leq 1$ は、顧客が期間ごとの価格変動にどのように反応するかを表す:

- 応答的な顧客: $w = 0$ のとき、顧客は現在の市場価格のみを考慮する。この場合、需要モデルは古典的な線形需要モデルと同じである。
- 選択的な顧客: $0 < w < 0.5$ のとき、顧客は価格に敏感で、現在の価格をより重視する傾向がある。選択的な顧客では、最近の価格上昇はナイーブな消費者よりも小さな需要を生み出す(その逆も同様)。
- ナイーブな顧客 $w = 0.5$ のとき、顧客は市場価格の変化に無知あるいは無関心である。
- 投機的な顧客: $0.5 < w < 1$ のとき、顧客は現在の市場価格をあまり重視しない。よって、例えば将来の価格が現在より高くなると予想する場合、当期に注文することがある。
- 遅い顧客: $w = 1$ の場合、顧客は前期の市場価格に基づいて注文を決定する。意思決定プロセスに時間がかかる場合に起こりうる。

ここまでの設定から以下の補題を得ることが出来る。

補題1: 前述の AR(1)型の価格モデルと線形需要モデルを用いると、需要量は以下の ARMA(1,1)モデルに従う:

$$d_t = \mu_d + \phi(d_{t-1} - \mu_p) + b(w-1)\varepsilon_t - wb\varepsilon_{t-1}.$$

注目すべき点は上記の ARMA(1,1)モデルには p_t が含まれず消滅してしまっていることである。異なる設定下における同様の発見は Giri & Glock (2022) に見ることができる。ARMA(1,1)モデルであることを利用すると需要量の分散式は比較的容易に求めることが出来る。ここで、需要量と価格を乗じた値の期待値、 $E[d_t * p_t]$ 、を市場規模と定義すると、以下の定理を導くことができる。

定理1: 市場規模の期待値は w の線形関数となる:

$$E[d_t * p_t] = \mu_p \mu_d - bV[p](1-w+w\phi) \\ = wbV[p](1-\phi) + \mu_p \mu_d - bV[p].$$

定理1は、市場規模の期待値は需要量と市場価格の平均値を掛け合わせた値($\mu_d \mu_p$)よりも小さくなる可能性があることを示している。

ここで、最小二乗誤差予測とOUTポリシーによる在庫管理理想定すると以下の定理を導くことができる。

定理2: 遅い顧客(すなわち $w = 1$)は、在庫量の分散を最小化する。

OUT ポリシーにより生成される発注量に注目すると以下の補題を得る。

補題2: 発注量は ARMA(1, 1)型モデルとなり、またその分散は遅い顧客(すなわち $w = 1$)の場合に最小となる。

補題2を活用すると以下の定理を得る。

定理3: 遅い顧客($w=1$)は発注量の分散を最小化し、応答的な顧客($w=0$)は発注量の分散を最大化する。

4. 経済性分析

利益関数 π を以下のように設定し、その値を最大化する事を考える:

$$\pi = E[d_t * p_t] - vE[d_t] - hE[ns_t^+] \\ - bE[-ns_t^+] - uk - umE[o_t - k]^+.$$

ここで $E[d_t * p_t]$ は市場規模の期待値、 v は単位当たり生産コスト(原材料とエネルギー)、 h は単位保有コスト、 p は単位バックログコスト、 $u(um)$ は製造キャパシティ k を超えない(超えた)場合の単位製造労働コストを示す。ここで $m(\geq 1)$ は残業時間乗数である。労働コストは最低でも uk となり残業量の程度に従って上昇する。図1に数値分析の結果を示す。市場価格が白色雑音($\phi = 0$)であり遅い顧客($w = 1$)の場合に最も高い利益が得られることがわかる。

5. 結論

我々は、自己相関を持つ市場価格が線形需要モデルにより需要量へ変換されるモデルを活用し、OUT ポリシーによって在庫管理されるサプライチェーンのダイナミクスに関して数理的な研究を実施した。まず需要量および発注量モデルどちらも ARMA(1,1)モデルにて表現できることを示した。また OUT

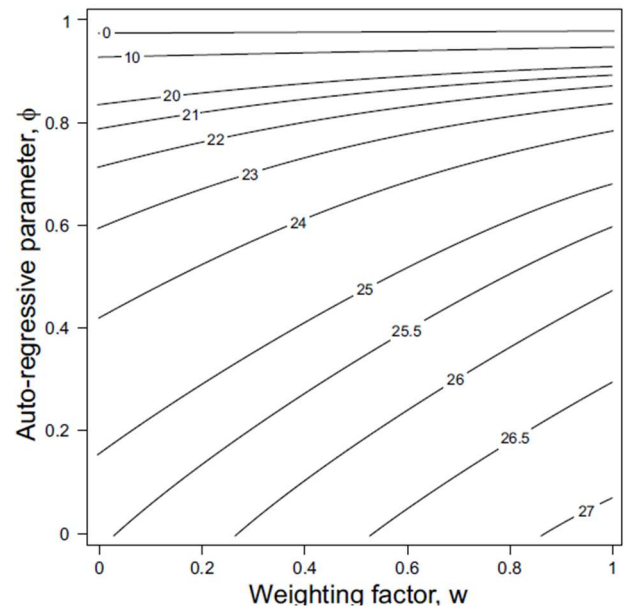


図1: $a = 20$, $b = 1$, $\sigma = 1$, $\mu_p = 5$, $h = 1$, $p = 9$, $u = 2$ and $m = 1.5$ とした場合の w と ϕ が利益関数 π に与える影響

ポリシーによる在庫と発注量の分散は遅い顧客($w = 1$)の場合に最小されることを示した。数値分析により、市場価格が白色雑音の場合に利益は最大化する事例を提示した。

本研究は JSPA 科研費(23H01638, 代表: 細田高道)の助成を受けたものである。

参考文献

- 1) Cohen, M.C., Perakis, G., & Thraves, C. (2022). Consumer surplus under demand uncertainty. *Production and Operations Management*, 31, 478-494.
- 2) Giri, B., & Glock, C. (2022). The bullwhip effect in a manufacturing/remanufacturing supply chain under a price-induced non-standard ARMA(1,1) demand process. *European Journal of Operational Research* 301, 458-472.
- 3) Gong, X., Chen, Y.F., & Yuan, Q. (2022). Coordinating inventory and pricing decisions under total minimum commitment contracts. *Production and Operations Management*, 31, 511-528.
- 4) Shen, X., Bao, L., & Yu, Y. (2018). Coordinating inventory and pricing decisions with general price-dependent demands. *Production and Operations Management*, 27, 1355-1367.
- 5) Wang, N., Ma, Y., He, Z., Che, A., Huang, Y., & Xu, J. (2014). The impact of consumer price forecasting behaviour on the bullwhip effect. *International Journal of Production Research*, 52, 6642-6663.